RISOLUZIONE DEI CIRCUITI DEL II ORDINE

1 - La variabile $x(t)$ da determinare sia una variabile di stato (tensione su un condensatore $v_C(t)$ oppure corrente in un induttore $i_L(t)$. [vedi Nota la punto 5 nel caso in cui $x(t)$ NON sia una variabile di stato]

2 – La soluzione $x(t)$ di un circuito STABILE (parte reale delle frequenze naturali s_1 e $s_2 \leq 0$) può assumere una delle seguenti espressioni in funzione dei valori di s_1 e s_2 :

- Caso A (sovrasmorzato) quando s_1 e s_2 sono reali negative distinte

$$x(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + x(\infty)$$

- Caso B (smorzamento critico) quando s_1 e $s_2 = s$ sono reali negative coincidenti

$$x(t) = (K_1 + K_2 t) e^{st} + x(\infty)$$

- Caso C (sottosmorzato) quando s_1 e s_2 sono complesse coniugate $\alpha \pm j\beta$ (con $\alpha < 0$)

$$x(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + x(\infty) = e^{\alpha t}[A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t) + x(\infty)\,]$$

- Caso D (senza perdite) quando s_1 e s_2 sono immaginarie pure $\pm j\beta$ ($\alpha = 0$)

$$x(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + x(\infty) = A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t) + x(\infty)$$

3 – Per determinare s_1 e s_2 :

- scrivere le equazioni di stato
- dalla matrice **A** calcolare $\boxed{2\alpha = -\,\mathrm{tr}\,\mathbf{A}}$ e $\boxed{\omega_0^2 = \det \mathbf{A}}$
- dal polinomio caratteristico $\boxed{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0}$ ricavare s_1 e s_2

4 – Calcolare dal circuito $x(\infty)$ ponendo i condensatori in circuito aperto e gli induttori in corto circuito.

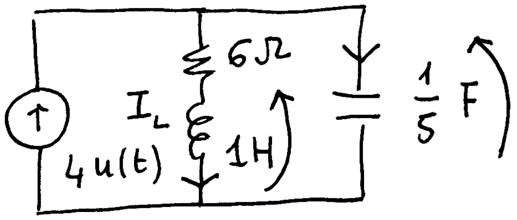
5 – Determinare K_1 e K_2 (oppure A e B) imponendo le condizioni iniziali a $t = 0^+$ (essendo x una variabile di stato è continua in $t = 0$ cioè $x(0^-) = x(0^+)$):

$x(0)$ è noto o ottenibile dal regime per $t = 0^-$

$\dot{x}(0)$ da una delle due equazioni di stato ponendo $t = 0^+$

Nota: se x(t) non è una variabile di stato è necessario esprimere in questo punto x in funzione delle variabili di stato (ed eventualmente dei generatori)

Esempio: (caso A)



$v_c(t) = ?$

Punto 3 : Equazioni di stato

$$\begin{cases} C\dot{V}_c = -I_L + 4u(t) \\ L\dot{I}_L = V_c - R I_L \end{cases} \qquad A = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}$$

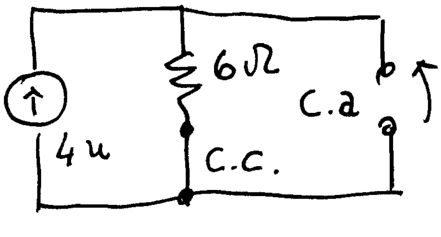
$$2\alpha = -\mathrm{tr}\, A = 6 \qquad \omega_0^2 = \det A = 5$$

Polinomio caratteristico $\Rightarrow s^2 + 6s + 5 = 0$

da cui $s_1 = -1 \quad s_2 = -5$ [caso A]

$$v_c(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-5t} + v_c(\infty)$$

Punto 4 : Calcolo di $v_c(\infty)$



$v_c(\infty) = 24\text{ V}$

Punto 5: Calcolo di K_1 e K_2 dalle condizioni iniziali $v_c(0^+)$ e $\dot{v}_c(0^+)$

$$\left.\begin{array}{l} v_c(0^-) = \boxed{v_c(0^+) = 0} \\ I_L(0^-) = \boxed{I_L(0^+) = 0} \end{array}\right\} \Rightarrow (a\ t=0^-\ u(t)=0)$$

$$\dot{v}_c(0^+) = \underbrace{\cancel{\frac{-I_L(0^+)}{C}}}_{=0} + \frac{4u(0^+)}{C} = 20 \quad \text{[dalle eq. di stato]}$$

$$v_c(0^+) = 0 = K_1 e^{-0} + K_2 e^{-0} + 24 \Rightarrow \boxed{K_1 + K_2 = -24}$$

$$\dot{v}_c(0^+) = 20 = (-1)K_1 e^{-0} + (-5)K_2 e^{-0} \Rightarrow \boxed{K_1 + 5K_2 = -20}$$

Si ricavano quindi $K_1 = -25$ $K_2 = 1$

$$\boxed{v_c(t) = -25e^{-t} + e^{-5t} + 24}$$

Esempio: (caso C)

Stesso circuito con $C = \frac{1}{10}$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -10 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} \qquad 2\alpha = -\mathrm{tr}\, A = 6 \quad \omega_0^2 = \det A = 10$$

$$P(s) = s^2 + 6s + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad s_{1,2} = -3 \pm j = \alpha \pm j\beta$$

$$v_c(t) = e^{-3t}\left[A\cos(t) + B\sin(t)\right] + v_c(\infty)$$

Punto 4: $v_c(\infty) = 24$ [non dipende da C]

Punto 5: $v_c(0^+) = 0 \quad I_L(0^+) = 0$

$$\dot{v}_c(0^+) = -\frac{I_L(0^+)}{C} + \frac{4u(0^+)}{C} = 40$$

$$v_c(0^+) = 0 = 1\cdot(A\cdot 1 + B\cdot 0) + 24 \quad \Rightarrow \boxed{A = -24}$$

$$\dot{v}_c(0^+) = 40 = e^0\left[-A(0) + B(1)\right] + (-3)\left[A\cdot 1 + B\cdot 0\right]$$

$$\Rightarrow 40 = B - 3A \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = -32}$$

$$\boxed{v_c(t) = e^{-3t}\left[-24\cos(t) - 32\sin(t)\right] + 24}$$

Esempio: (caso B)

Stesso circuito con $C = \frac{1}{9}$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -9 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} \qquad 2\alpha = -\mathrm{tr}A = 6 \quad \omega_0^2 = \det A = 9$$

$$P(s) = s^2 + 6s + 9 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -3 \text{ (doppia)}$$

$$v_c(t) = (K_1 + K_2 t)\, e^{-3t} + 24$$

<u>Punto 5</u> $v_c(0^+) = 0 \quad I_L(0^+) = 0$

$$\dot{v}_c(0^+) = -\frac{I_L(0^+)}{C} + \frac{4u(0^+)}{C} = 36$$

$$v_c(0) = 0 = K_1 + 24 \Rightarrow K_1 = -24$$

$$\dot{v}_c(0) = (K_1 + \cancel{K_2 t})(-3) + K_2 \cdot 1 = 36$$

$$\Rightarrow K_2 = 108$$

$$\boxed{v_c(t) = (-24 + 108\, t)\, e^{-3t} + 24}$$